Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\ dt.$$

1. *Montrer que g peut-être prolongée par continuité en 0. On appellera encore g la fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*
3. *Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.*

Solution :

1. *Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet, d'après le théorème fondamental de l'analyse une primitive F sur $\mathbb{R}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,*

$$g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x) - F(0)}{x} + \frac{F(-x) - F(0)}{-x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = f(0)$$

   car F est dérivable en 0 de dérivée $f(0)$. Donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.

2. *En utilisant ce qui a été fait dans la question précédente, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}$$

   avec F qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{2x\left(F'(x) + F'(-x)\right) - 2\left(F(x) - F(-x)\right)}{4x^2} = \frac{x\left(f(x) + f(-x)\right) - \left(F(x) - F(-x)\right)}{2x^2} = \frac{f(x) + f(-x) - g}{2x}$$

3. *Calculons le taux d'accroissement* Δ *de* g *en* 0. *Soit* $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\Delta(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{F(x) - F(-x)}{2x} - f(0)\right).$$

Comme F *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[-x, x]$, *d'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c_x \in\,]-x, x[$ *tel que* $F(x) - F(-x) = 2xf(c_x)$. *On obtient alors :*

$$\Delta(x) = \frac{f(c_x) - f(0)}{x}.$$

On utilise alors le fait que $c_x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *et que* f *est dérivable en* 0. *On trouve* $\lim_{x\to 0} \Delta(x) = f'(0)$ *donc* $\boxed{g'(0) = f'(0)}$..

Références