Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

1. *Montrer que f est bien définie.*
2. *En effectuant un changement de variable, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = f\left(\frac{1}{2x}\right)$.*
3. *En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.*

Solution :

1. *La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions continues. Par application du théorème fondamental, on en déduit qu'elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F(2x) - F(x)$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. On remarque de plus que φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de F.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2x}\right) &= \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt \\ &\underset{}{\overset{u=\frac{1}{t}}{=\!=}} \int_{2x}^{x} -\frac{1}{u^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}}\,du \\ &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. *Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ revient à chercher un équivalent de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0. D'après la question précédente, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. D'après la première question, on peut*

affirmer que $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et admet donc un développement limité à l'ordre* 1 *en* 0*. Au voisinage de* 0*, on a donc :*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(0) + \frac{x}{2} f'(0) + \underset{x \to 0}{o}(x).$$

Mais, d'après la première question, $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$ *donc* $f'(0) = 1$*. Il est clair d'autre part que* $f(0) = 0$*. On a donc :* $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)$ *ce qui amène* $f\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ *et il vient* $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}}$.

Références