Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\, dt$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que*

$$f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\, g(t)\, dt$$

2. *En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.*
3. *Résoudre cette équation différentielle.*

Solution :

1. *Soit $x, t \in \mathbb{R}$. On a : $\sin(x-t)\, g(t) = \sin x \cos t g(t) - \cos x \sin t g(t)$. Les fonctions $t \mapsto \cos t g(t)$ et $t \mapsto \sin t g(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ par opération sur les fonctions continues. Par application du théorème fondamental, elles admettent, respectivement, des primitives G_1 et G_2 sur $\mathbb{R}$. On peut supposer de plus que ces deux primitives s'annulent en 0. On a alors d'après les formules d'addition :*

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\, dt = \sin x G_1(x) - \cos x G_2(x)$$

G_1 et G_2 étant de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de f et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x G_1(x) + \sin x \cos x g(x) + \sin x G_2(x) - \cos x \sin x g(x) \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \\ &= \int_0^x \cos(x-t)\, g(t)\, dt \end{aligned}$$

2. *En effectuant des calculs analogues au précédent, on obtient :*

$$\begin{aligned} f''(x) = & \quad -\sin x G_1(x) + \cos^2 g(t) + \cos x G_2(x) + \sin^2 x g(x) \\ = & \quad g(x) - \sin x G_1(x) + \cos x G_2(x) \\ = & \quad g(x) - f(x) \end{aligned}$$

   f *est donc solution de l'équation différentielle donnée.*

3. *Les solutions de* $y'' + y = 0$ *sont les fonctions :* $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$ *où* α, β *sont réels. Les solutions de* $y'' + y = g$ *sont donc les fonctions :*

$$x \mapsto f(x) + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

   avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Références