Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

12 juillet 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer que la fonction définie par

$$\varphi(x) = \int_{\frac{x-1}{x}}^{\frac{x}{x+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + \int_1^{2x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

est constante.

Solution : *D'après le théorème fondamental, φ est définie et dérivable sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. On calcule sa dérivée sur chacun de ces intervalles :*

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+1}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+1}\frac{1}{x^2} + \frac{4x}{4x^4+1}\\ &= \frac{1}{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2x^2-2x+1} + \frac{4x}{4x^4+1}\\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0\end{aligned}$$

On obtient donc la formule

$$\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) + \arctan(2x^2) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Références