Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction f continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution : *Considérons la fonction*

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x [f(t) - f(1)]\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, F est bien définie d'après le théorème fondamental. Pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(1)$ et donc $F(0) = 0 = F(1)$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $F'(\alpha) = 0$, mais puisque $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = f(x) - f(1)$, on en déduit que $f(\alpha) = f(1)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à f sur le segment $[\alpha,1]$, il existe $c \in]\alpha,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Références