Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle à déterminer et calculer leur dérivée en fonction de f :

1. $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$
2. $g(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sh} t\, f(\operatorname{ch} t)\,dt$
3. $g(x) = \int_0^x f(t+x)\,dt$
4. $g(x) = \int_1^x \dfrac{f(\ln t)}{t}\,dt$

Solution : *Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x^2) - F(2x)$. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.*
2. *La fonction $t \mapsto F(\operatorname{ch} t)$ est une primitive de $t \mapsto \operatorname{sh} t f(\operatorname{ch} t)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F\left(\operatorname{ch}\left(x^2\right)\right) - F(1)$. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x \operatorname{sh}\left(x^2\right) f\left(\operatorname{ch}\left(x^2\right)\right)$.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t+x)$ est une primitive de $t \mapsto f(t+x)$ donc la fonction g donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = F(2x) - F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions de $\mathcal{C}^1$. De plus $g'(x) = 2f(2x) - f(x)$.*
4. *La fonction $t \mapsto F(\ln t)$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{f(\ln t)}{t}$ donc la fonction g donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = F(\ln x) - F(0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus $g'(x) = \dfrac{f(\ln x)}{x}$.*

Références