

Pas de titre

François Capaces¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and Alain Soyeur³

¹,

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère le point $B = (a, 0)$ du plan et un cercle \mathcal{C} passant par B de centre $P = (x_0, y_0)$.

1. Écrire l'équation de \mathcal{C} .
2. On considère une droite passant par O d'équation

$$y = mx$$

Écrire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que cette droite soit tangente à \mathcal{C} .

3. Trouver l'ensemble des points P tels que les deux tangentes à \mathcal{C} passant par l'origine soient orthogonales.

Solution :

1.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2$$

2. Cette droite est tangente au cercle si et seulement si $d(P, \mathcal{D}) = R$, ce qui donne

$$\frac{|y_0 - mx_0|}{\sqrt{1 + m^2}} = (x_0 - a)^2 + y_0^2$$

On trouve la condition

$$[a^2 + y_0^2 - 2ax_0]m^2 - 2x_0y_0m + (x_0 - a)^2 = 0$$

3. Les deux pentes m_1, m_2 doivent vérifier $m_1m_2 = 1$, c'est-à-dire puisqu'elles sont racines d'une équation du second degré :

$$\frac{(x_0 - a)^2}{a^2 + y_0^2 - 2am_0} = -1$$

Après développement, on trouve $x_0^2 = y_0^2$ d'où

$$(x_0 - 2a)^2 + y_0^2 = 2a^2$$

C'est le cercle de centre $(2a, 0)$ de rayon $\sqrt{2}a$.

Références