Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On considère le point $B = (a, 0)$ du plan et un cercle $\mathcal{C}$ passant par B de centre $P = (x_0, y_0)$.

1. *Écrire l'équation de $\mathcal{C}$.*
2. *On considère une droite passant par O d'équation*
$$y = mx$$
Écrire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que cette droite soit tangente à $\mathcal{C}$.
3. *Trouver l'ensemble des points P tels que les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par l'origine soient orthogonales.*

Solution :

1. $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2$$
2. *Cette droite est tangente au cercle si et seulement si $d(P, \mathcal{D}) = R$, ce qui donne*
$$\frac{|y_0 - mx_0|}{\sqrt{1 + m^2}} = (x_0 - a)^2 + y_0^2$$
On trouve la condition
$$[a^2 + y_0^2 - 2ax_0]m^2 - 2x^0 y_0 m + (x_0 - a)^2 = 0$$
3. *Les deux pentes m_1, m_2 doivent vérifier $m_1 m_2 = 1$, c'est-à-dire puisqu'elles sont racines d'une équation du second degré :*
$$\frac{(x_0 - a)^2}{a^2 + y_0^2 - 2am_0} = -1$$
Après développement, on trouve $x_0^2 = y_0^2$ d'où
$$(x_0 - 2a)^2 + y_0^2 = 2a^2$$
C'est le cercle de centre $(2a, 0)$ de rayon $\sqrt{2}a$.

Références