Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$I(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2+t^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication 0.0 : *Faire un changement de variables qui fera apparaître la variable x à l'intérieur de f.*

Solution : *Par le changement de variables $t = xu$, on trouve que*

$$I(x) = \int_0^1 \frac{f(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Montrons que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)\pi/4$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au point 0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,\alpha]$, $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Soit alors $x \in [0,\alpha]$,

$$\left| I(x) - f(0) \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(ux)-f(0)|}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon$$

En effet, si $u \in [0,1]$, on a $0 \leqslant ux \leqslant x \leqslant \alpha$ et donc $\dfrac{|f(ux)-f(0)|}{1+u^2} \leqslant \varepsilon$, ce qui permet de majorer l'intégrale et d'aboutir au résultat.

Références