# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★★ ***Pas de titre***

*Soit une fonction* $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *continue et un réel* $a \in [0,1]$*. Trouver la limite de la suite de terme général*

$$I_n = \int_0^1 f(ax^n)\,\mathrm{d}x$$

***Solution :*** *Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* $f$ *est continue en* $0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $|x| \leqslant \eta$ *alors* $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$*. Pour tout* $c \in ]0,1[$*, on a :*

$$|I_n - f(0)| \leqslant \int_0^c |f(ax^n) - f(0)|\ dx + \int_c^1 |f(ax^n) - f(0)|\ dx$$

- *Il est clair que* $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 |f(ax^n) - f(0)|\ dx = 0$*. On peut alors fixer* $c \in ]0,1[$ *en sorte que* $\int_c^1 |f(ax^n) - f(0)|\ dx \leqslant \varepsilon$*.*
- *Comme* $c^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$*, on a* $0 \leqslant ac^n \leqslant \eta$*. Comme* $0 \leqslant x \leqslant c$*, on a* $ax^n \in [0,\eta]$*. Il vient alors :* $|f(ax^n) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ *et* $\int_0^c |f(ax^n) - f(0)|\ dx \leqslant c\varepsilon \leqslant \varepsilon$*. car* $c \in ]0,1[$*.*

*Au final, pour* $n \geqslant N$*, on a :* $|I_n - f(0)| \leqslant 2\varepsilon$ *et donc* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)}$.

## Références