Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

26 juillet 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0,1] \to R$ continue. Trouver la limite des suites de terme général :

1. $H_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$
2. $I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. *La fonction f est continue sur $[0,1]$ et est donc majorée sur $[0,1]$ par $M = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. On a alors $\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right| \leqslant M\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc d'après le théorème des gendarmes, $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Remarquons que $I_n = n\int_0^1 x^n\,[f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x$. Par ailleurs :*
   (a) $n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.
   (b) *Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, f est bornée. Notons $M = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au point 1, il existe $c \in]0,1[$ tel que $\forall x \in [c,1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant \varepsilon$. Alors*
   $$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant n\int_0^c x^n 2M\,\mathrm{d}x + n\int_c^1 x^n\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2M\frac{n}{n+1}c^{n+1} + \frac{n}{n+1}(1-c^{n+1})\varepsilon\\ &\leqslant 2Mc^{n+1}+\varepsilon\end{aligned}$$
   Comme $|c| < 1$, la suite géométrique (c^n) converge vers 0. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x| \leqslant 2\varepsilon$. Donc, la première suite tend vers 0.

   En conclusion, $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)}$.

Références