Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On définit une fonction I en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $I(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^\pi \sin(x^2 \sin t)dt$. Trouver la limite de $I(x)$ lorsque $x \to 0$.

Solution : *Soit x un réel appartenant à un voisinage épointé de 0 inclus dans $\left]-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right[$. Sur ce voisinage, sin est strictement croissante. Pour tout $t \in [0,\pi]$, on peut écrire : $-x^2 \leqslant x^2 \sin t \leqslant x^2$ ce qui amène : $\sin\left(-x^2\right) \leqslant \sin\left(x^2 \sin t\right) \leqslant \sin\left(x^2\right)$ et donc en passant à l'intégrale et en divisant par x en obtient :*

$$\pi\frac{\sin\left(-x^2\right)}{x} \leqslant I\left(x\right) \leqslant \pi\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}.$$

Mais comme $\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'après le théorème des gendarmes, il vient : $\boxed{I\left(x\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$.

Références