Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit la suite de fonctions (g_n) *définies sur* $[0,1]$ *par* $g_n(x) = 0$ *si* $x \in]\frac{1}{n}, 1]$ *et* $g_n(x) = n$ *si* $x \in [0, \frac{1}{n}]$. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$. *Trouver la limite de la suite de terme général*

$$I_n = \int_0^1 f(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* f *est continue en* 0, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall x \in [0,\eta]\,,\quad |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. *Il existe aussi* $N \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $1/n \leqslant \eta$. *Soit* $n \geqslant N$. *On a :*

$$I_n = \int_0^1 f(t)\,g_n(t)\ dt = \int_0^{1/n} f(t)\,g_n(t)\ dt + \int_{1/n}^1 f(t)\,g_n(t)\ dt = \int_0^{1/n} nf(t)\ dt.$$

Mais

$$f(0) - \varepsilon = \int_0^{1/n} n\left(f(0) - \varepsilon\right)\ dt \leqslant \int_0^{1/n} nf(t)\ dt \leqslant \int_0^{1/n} n\left(f(0) + \varepsilon\right)\ dt = f(0) + \varepsilon$$

Donc $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)}$.

Références