Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\, dt$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{2x} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{3x} \dfrac{e^{-t}}{t}\, dt$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\, dt$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \int_{x}^{2x} \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\, dt$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{2x} \dfrac{\cos t}{t}\, dt$

Indication 0.0 : *Pour la dernière, penser à une intégration par parties.*

Solution :

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $t \in [-2x, 2x]$, $-1 \leqslant \cos\left(t^4\right) \leqslant 1$ *donc* $\int_{-2x}^{2x} -\,dt \leqslant \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\, dt \leqslant \int_{-2x}^{2x} dt$ *ce qui amène :* $-2x \leqslant \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\, dt \leqslant 2x$ *et par application du théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{x\to 0} \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\, dt = 0$
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in [x, 2x]$, $-\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ *donc* $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x} \leqslant \int_{x}^{2x} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$ *et par application du théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{2x} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt = 0$. *Cette question est aussi faisable en calculant directement une primitive de* $t \mapsto \cos(1/t)/t^2$.
3. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in [x, 3x]$, $\dfrac{e^{-3x}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{t}$ *donc* $e^{-3x} \ln 3 \leqslant \int_{x}^{3x} \dfrac{e^{-t}}{t}\, dt \leqslant e^{-x} \ln 3$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_{x}^{3x} \dfrac{e^{-t}}{t}\, dt = 0$

4. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in \left[x, x^2\right]$, $\dfrac{1}{\ln x^2} \leqslant \dfrac{1}{\ln t}$ *donc* $\dfrac{x^2 - x}{\ln x^2} \leqslant \int_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\, dt$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt = +\infty$
5. *Soit* $x \in \mathbb{R}_-^*$. *Pour tout* $t \in [x, 2x]$, $\dfrac{e^{\frac{1}{2x}}}{t} \leqslant \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \leqslant \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{t}$ *donc* $\ln 2 e^{\frac{1}{2x}} \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\, dt \leqslant \ln 2 e^{\frac{1}{x}}$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\, dt = \ln 2.$
6. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$.*En effectuant une intégration par parties, on obtient :* $\int_x^{2x} \dfrac{\cos t}{t}\, dt = \left[\dfrac{\sin t}{t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\, dt$. *Il est clair que :* $\dfrac{\sin 2x}{2x} - \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. *Par ailleurs, pour tout* $t \in [x, 2x]$, $-\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{\sin t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ *donc* $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x} \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\, dt \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$ *et d'après le théorème des gendarmes,* $\int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. *On a ainsi montré que :* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = 0$

Références