Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

A l'aide de majorations simples, trouver les limites des suites suivantes :

1. $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+e^{nx}} dx$;
2. $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+x} dx$;
3. $I_n = \int_0^1 x^n \sin(nx) dx$;
4. $I_n = \int_0^1 e^{-nx}(1+x^n) dx$;
5. $I_n = \dfrac{1}{n}\int_n^{2n} \arctan x dx$;
6. $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$.

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+e^{nx}} \leqslant x^n$ donc par passage à l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
2. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$ donc par passage à l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant -\frac{e^{-n}-1}{n}$ et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
3. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^n \sin(nx) \leqslant x^n$ donc par passage à l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
4. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant e^{-nx}(1+x^n) \leqslant 2e^{-nx}$ donc en passant à l'intégrale, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{-2}{n}(e^{-n}+1)$ et par le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
5. *Comme $\arctan$ est croissante, pour tout $x \in [n,2n]$, $\arctan n \leqslant \arctan x \leqslant \arctan(2n)$ et il vient que : $n \arctan n \leqslant \int_n^{2n} \arctan x dx \leqslant n \arctan(2n)$. On en déduit que $\arctan n \leqslant I_n \leqslant \arctan(2n)$ et d'après le théorème des gendarmes :* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}}$.

6. *Comme* $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ *est croissante sur* $[0,1]$, *on a :*

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \leqslant \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$

donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{I_n \to 0}$.

Références