Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit une fonction convexe φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. *Si f est une fonction en escalier sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. *Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution :

1. *Considérons une subdivision $\sigma : x_0 = 0 < \cdots < x_n = 1$ subordonnée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]x_i,x_{i+1}[} = c_i$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(x_{i+1}-x_i)$. Remarquons que $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = 1$. Comme φ est convexe, on peut alors écrire :*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(x_{i+1}-x_i)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\varphi(c_i) = \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe une suite (f_n) de fonctions en escaliers sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Donc :*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = \varphi\left(\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\right) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$$

car φ est continue sur $\mathbb{R}$. Mais d'après la première question, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f_n(x)\,\mathrm{d}x$ donc par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi\circ f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et que φ est, d'après le théorème de Heine, uniformément continue sur $[0,1]$, $(\varphi \circ f_n)$ converge uniformément vers $\varphi \circ f$ sur $[0,1]$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \varphi \circ f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} \varphi \circ f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi \circ f(x) \, \mathrm{d}x$$

ce qui prouve la propriété.

Références