Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère le point $A = (a, a)$ $(a > 0)$.

1. *On considère la famille des cercles $\mathcal{C}_t$ passant par A et O. On désigne par t l'abscisse du centre de $\mathcal{C}_t$. Former l'équation cartésienne de $\mathcal{C}_t$.*
2. *Le cercle $\mathcal{C}_t$ coupe la droite (Ox) en O et un second point K_t. Former l'équation cartésienne de la tangente D_t à $\mathcal{C}_t$ en K_t.*
3. *Déterminer en fonction de t l'équation cartésienne de la normale à D_t passant par A puis les coordonnées de la projection orthogonale H_t de A sur D_t.*
4. *Reconnaître l'ensemble des points H_t lorsque t varie.*

Solution :

1. *Comme $d(C_t, 0) = d(C_t, A)$, on trouve*

$$(\mathcal{C}_t : x^2 + y^2 - 2tx + 2(t-a)y = 0$$

On aurait pu partir également d'une équation cartésienne générale d'un cercle passant par O :

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0$$

et dire que le point A appartenait à ce cercle.

2. $K_t \begin{vmatrix} 2t \\ 0 \end{vmatrix}$, $C_t \begin{vmatrix} t \\ a-t \end{vmatrix}$, *d'où l'équation cartésienne de la tangente :* $\overrightarrow{C_tK_t} \cdot \overrightarrow{K_tM} = 0$ *:*

$$tX + (t-a)Y - 2t^2 = 0$$

3. *Le vecteur* $n_t \begin{vmatrix} t \\ t-a \end{vmatrix}$ *est orthogonal à la droite $\mathcal{D}_t$. On écrit*

$$\begin{vmatrix} X-a & t \\ Y-a & t-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (t-a)(X-a) - t(Y-a) = 0.$$

On trouve

$$H_t \begin{vmatrix} t+a \\ t \end{vmatrix}$$

4. *C'est la droite d'équation* $y = x - a$.

Références