# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Soient deux fonctions strictement positives $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrer que*

$$\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{g(t)}{f(t)}\right) \mathrm{d}t \geqslant 2$$

***Solution :*** *On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \frac{f}{\sqrt{fg}} \frac{g}{\sqrt{fg}}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left[\int_0^1 \frac{f^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \times \left[\int_0^1 \frac{g^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{f^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{g^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{f}{g} + \frac{g}{f}\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

*Le résultat s'en suit. Pour avoir égalité, il faut qu'il y ait égalité dans Cauchy-Schwarz, donc que $f/g$ et $g/f$ soient proportionnelles, donc que $f$ et $g$ soient proportionnelles, et ensuite que $\lambda = 1$, c'est-à-dire que $f = g$.*

*Remarque : Pour $u > 0$, $u + \frac{1}{u} \geqslant 2$, d'où le résultat en prenant $u = \dfrac{f(t)}{g(t)}$. Le cas d'égalité est simple.*

## Références