Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer les fonctions $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit une telle fonction f. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left|\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

En notant $I = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x$, on trouve donc le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $I = \sqrt{I}\sqrt{I}$. On sait alors qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f^2 = \lambda f$. Donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ou bien $f(x) = \lambda$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$ et qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il devrait exister $c \in [x_0, x_1]$ tel que $f(c) = \lambda/2$ ce qui est impossible. Par conséquent, la fonction f est constante sur $[a, b]$. On voit que cette constante vaut 0 ou 1. La réciproque est immédiate.

Références