# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

**Exercice 0.1** ★ **Pas de titre**

*Soit l'ensemble* $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$. *Déterminer*

$$\alpha = \inf_{f \in E} \left( \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \left( \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$$

***Solution :*** *Soit* $f \in E$. *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :*

$$\left( \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \left( \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right) \geqslant \left( \int_a^b \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f}}\,\mathrm{d}x \right)^2 = (b-a)^2$$

*donc* $(b-a)^2 \leqslant \alpha$. *Mais la fonction* $f_0$ *constante égale à 1 sur* $[a,b]$ *est élément de* $E$ *et vérifie :*

$$\left( \int_a^b f_0(x)\,\mathrm{d}x \right) \left( \int_a^b \frac{dx}{f_0(x)} \right) = (b-a)^2$$

*donc* $\boxed{\alpha = (b-a)^2}$.

## Références