Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit une fonction f continue sur le segment $[0,1]$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on note

$$I_k = \int_0^1 x^k \left| f(x) \right| \, \mathrm{d}x$$

Montrer que pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{p+q}^2 \leqslant I_{2p} I_{2q}$.

Solution : *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$I_{p+q}^2 = \left(\int_0^1 x^{p+q} \left| f(x) \right| \, \mathrm{d}x \right)^2 = \left(\int_0^1 x^p \sqrt{\left| f(x) \right|} x^q \sqrt{\left| f(x) \right|} \, \mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \int_0^1 x^{2p} \left| f(x) \right| \, \mathrm{d}x \int_0^1 x^{2q} \left| f(x) \right| \, \mathrm{d}x = I_{2p} I_{2q}$$

Références