Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit deux fonctions continues et positives $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. *On suppose que* $\forall x \in [0,1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. *Montrer que*

$$\left[\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right]\left[\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t\right] \geqslant 1$$

Étudier le cas d'égalité.

Solution : *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquées aux fonctions* $\sqrt{f}$ *et* $\sqrt{g}$ *sur* $[0,1]$, *on a :*

$$1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\ \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t}$$

ce qui prouve l'inégalité. Si cette inégalité est une égalité, alors il y a égalité dans Cauchy-Schwarz, et il est nécessaire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$ *tel que* $g = \lambda f$ *(ou alors* $f = \lambda g$*). De plus, pour avoir* $1 = \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\ \mathrm{d}t$, *il faut que* $\int_0^1 \left[\sqrt{fg(t)} - 1\right]\ \mathrm{d}t = 0$. *Comme la fonction intégrée est continue et positive, et que son intégrale est nulle, d'après le cours la fonction est nulle. Par conséquent, les deux fonctions* f *et* g *doivent être constantes et inverses l'une de l'autre. On vérifie la réciproque facilement.*

Références