

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Peut-il y avoir égalité ?

Solution : On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto 1/x$ sur le segment $[a, b]$:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \left(\int_a^b dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

On a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles sur le segment $[a, b]$ ce qui n'est évidemment pas le cas.

Références