Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que $\forall k \in [0, n]$, $\int_a^b t^k f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

Solution : *Si f est la fonction identiquement nulle sur $[a, b]$ alors le résultat est évident. On suppose dans toute la suite que f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$.*

Remarquons que l'hypothèse de l'énoncé est équivalente au fait que pour tout polynômes P de degré $\leqslant n$ alors $\int_a^b P(t) f(t)\ dt = 0$.

On va montrer par récurrence la propriété P_n suivante :

$$P_n : \left[\left[\forall k \in [0, n], \quad \int_a^b t^k f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right] \Rightarrow f \text{ change au moins } n+1 \text{ fois de signe sur } [a, b]\right].$$

Le résultat découle de cette propriété par application du théorème des valeurs intermédiaires.

Montrons P_0. Si f ne change pas de signe sur $[a, b]$ alors f est positive ou négative sur $[a, b]$ et comme f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$, on ne peut avoir $\int_a^b f(t)\ dt = 0$. Donc f change de signe au moins une fois sur $[a, b]$ et P_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_{n-1} est vraie et prouvons que P_n est vraie. On suppose donc que pour toute fonction polynomiale P de degré $\leqslant n$, $\int_a^b P(t) f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que f change au moins n fois de signe sur $[a, b]$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [a, b]$ les points de $[a, b]$ en lesquels f change de signe (ce sont des zéros distincts de f). Notons aussi $\alpha_0 = a$ et $\alpha_{n+1} = b$. Par l'absurde, supposons que f ne change pas $n+1$ fois de signe sur $[a, b]$. Considérons une fonction polynomiale P du signe de f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. Une telle fonction existe, il suffit par exemple de considérer $P(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$ si f est positive sur $[\alpha_0, \alpha_1]$ ou son opposé si f est négative sur ce segment. La fonction Pf est alors positive sur $[a, b]$. Mais par hypothèse, son intégrale est nulle donc on devrait avoir $Pf = 0$ ce qui n'est pas possible car ni f ni P ne sont nuls. Donc f change au moins $n+1$ fois de signe sur $[a, b]$ et la propriété est prouvée par récurrence.

Références