Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Solution : *Si g est identiquement nulle sur $[a, b]$, la propriété est trivialement vérifiée. Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme $g \geqslant 0$, on peut affirmer que $\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. De plus :*

$$\inf_{[a,b]} f = \frac{\inf_{[a,b]} f \int_a^b g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant \frac{\sup_{[a,b]} f \int_a^b g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} = \sup_{[a,b]} f.$$

On en déduit que $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \in \left[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\right]$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur le segment $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}$ et l'égalité est prouvée.

Références