

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Trouver les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Solution : Soit f une fonction vérifiant l'égalité ci dessus. Alors :

$$\int_a^b \left(\sup_{[a, b]} f - f(x) \right) dx = 0.$$

Mais $\sup_{[a, b]} f - f$ est une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Comme son intégrale sur $[a, b]$ est nulle alors $\sup_{[a, b]} f - f$ est nulle et donc f est constante. On vérifie réciproquement que les fonctions constantes satisfont l'égalité de l'énoncé.

Références