Un théorème de point fixe

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Un théorème de point fixe***

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[0,1]$ *et telle que* $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. *Montrer que* f *admet un point fixe.*

Indication 0.0 : *Introduire la fonction* $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - t \end{cases}$.

Solution : *On a* $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. *Si* φ *ne change pas de signe sur* $[0,1]$ *alors d'après le cours* $\varphi = 0$, *Sinon, si* φ *change de signe sur* $[0,1]$, *comme* φ *est continue sur* $[0,1]$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur* $[0,1]$ *et donc* f *admet un point fixe.*

On peut aussi proposer la solution suivante. Comme $\int_0^1 f(t)\ dt = 1/2$ *il vient que* $\int_0^1 \varphi(t)\ dt = 0$. *D'après le théorème de la moyenne, il existe* $c \in [0,1]$ *tel que* $g(c) = 0$ *et par construction,* c *est un point fixe de* f.

Références