Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$
2. $f \leqslant 0$ *ou* $f \geqslant 0$.

Solution : *Le sens indirect est trivial. Pour le sens direct, supposons que* $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$ *et donc* $\int_a^b (|f(t)| - f(t))\,dt = 0$. *La fonction* $|f| - f$ *est continue et positive. On sait que l'intégrale d'une fonction positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Donc* $|f| - f$ *est nulle et* f *est positive. Le cas* $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$ *se traite de la même façon.*

Références