

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{t}$$

Solution : C'est une fraction rationnelle en t et en la racine n -ième d'une homographie. Posons

donc $u = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$:

$$t = \frac{u^2 + 1}{-u^2 + 1} \quad dt = \frac{4u}{(1 - u^2)} du$$

Donc

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1 - u^2)(1 + u^2)} du$$

et en décomposant en éléments simples cette fraction rationnelle,

$$\frac{4u^2}{(1 - u^2)(1 + u^2)} = \frac{1}{1 + u} - \frac{1}{u - 1} - \frac{2}{u^2 + 1}$$

on trouve finalement :

$$I = \ln \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) - \frac{\pi}{3}$$

Références