

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer une primitive de

$$F = \int (x+1)^2 \sqrt{-x^2 - 2x + 1} dx$$

(préciser l'intervalle)

Solution : La fonction à primitiver est continue sur le l'intervalle $I = [-1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1]$. On cherche une primitive sur cet intervalle. C'est une primitive d'une fraction rationnelle en x et la racine d'un trinôme. On commence par réduire le trinôme sous forme canonique :

$$-x^2 - 2x + 1 = -((x+1)^2 - 2) = 2\left(1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

et après le changement de variables $y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, on se ramène au calcul d'une primitive sur $J = [-1, 1]$:

$$G = 4 \int y^2 \sqrt{1-y^2} dy$$

En posant alors $y = \sin t$, (pour éliminer la racine), on se ramène au calcul d'une primitive sur l'intervalle $J' = [-\pi/2, \pi/2]$:

$$H = 4 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = \int \sin^2(2t) dt$$

qui se calcule en linéarisant. Remplacer ensuite en fonction de x . Terminer le calcul!

Une autre méthode consiste à écrire (a et b sont les racines du trinôme avec $a < b$) :

$$\sqrt{-x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-a)(b-x)} = (x-a) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

et à se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en x et en la racine d'une homographie. Poser alors t la racine de l'homographie.

Références