Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Calculer $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Poser* $t=\sqrt{x+2}$, *et ensuite un changement de variables en* ch.
$t^2=x+2,\ 2t\,\mathrm{d}t=\ \mathrm{d}x,\ x+1=t^2-1.$

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2+\sqrt{t^2-1}}{1+t} t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2+\operatorname{sh} u}{1+\operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{2+\operatorname{sh} u}{1+\operatorname{ch} u}(1+\operatorname{ch} u)\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{2+\operatorname{sh} u}{1+\operatorname{ch} u}\operatorname{sh} u$$

$$= 4\int \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u + 2\int \operatorname{sh}^2 u\,\mathrm{d}u - 4\int \frac{\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u}{1+\operatorname{ch} u} - 2\int \frac{\operatorname{sh}^2 u\,\mathrm{d}u}{1+\operatorname{ch} u} = 4\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - u - 4\ln(1+\operatorname{ch} u) - 2\int \frac{(\operatorname{ch}^2 u - 1)\,\mathrm{d}u}{1+\operatorname{ch} u}$$

$$= 4\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - u - 4\ln(1+\operatorname{ch} u) - 2\operatorname{sh} u + 2u + C$$

$$= 4\sqrt{x+2} + \sqrt{(x+2)(x+1)} - 4\ln(1+\sqrt{x+2}) - 2\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}) + C,$$

puisque $u=\ln(w+\sqrt{w^2-1})$ *avec* $w=\sqrt{x+2}$ *et donc* $\sqrt{w^2-1}=\sqrt{x+1}$.

Références