

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ sur $I =]1, +\infty[$.

Solution : Multiplier par les quantités conjuguées et se ramener au calcul de deux primitives simples.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\operatorname{ch} u} du + \frac{1}{2} \int \frac{2}{\operatorname{sh} v} dv$$

en posant $x = \operatorname{sh} u$ puis $x = \operatorname{ch} v$. Maintenant

$$\int \frac{2}{\operatorname{ch} u} du = \int \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2} du = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2u + \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

et

$$\int \frac{2}{\operatorname{sh} v} dv = \int \frac{\operatorname{ch} 2v - 1}{2} dv = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2v - \frac{v}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v - \frac{v}{2} + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$$

Finalement,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x \sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \right) + C$$

Références