

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ sur \mathbb{R} (justifier l'intervalle).

Solution : Séparer en deux primitives pour appliquer la règle de Bioche à chacune. En posant $u = \cos x$ et $v = \sin x$,

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{2 - \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{dv}{2 - v^2} + \int \frac{du}{1 + u^2}.$$

En posant $v = \sqrt{2}w$ $dv = \sqrt{2} dw$, on a

$$\int \frac{dv}{2 - v^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dw}{1 - w^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{1 + w}{1 - w} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} \right) + C$$

D'où

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} \right) + \arctan \cos x + C$$

Références