

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer $\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx$.

Solution :

$$\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + 2x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{-x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{(x^2 + 2)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{2(x^2 + 2)} \right]_0^1$$

Le terme tout intégré vaut $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$, et, en intégrant par parties,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = \left[\frac{x}{x^2 + 2} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{(x^2 + 2) dx}{x^2 + 2} - 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = -\frac{1}{3} + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{2} du}{2u^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

On trouve que

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Références