

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

Solution : On peut écrire $x(1-x) = -(x^2 - x) = -((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4})$ Donc

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} dx$$

et en posant $y = x - \frac{1}{2}$, $dy = dx$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - (2y)^2} dy$$

Par le changement de variables $z = 2y$, $dy = \frac{dz}{2}$,

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} dz = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

On peut retrouver ce résultat en étudiant la courbe $y = \sqrt{x(1-x)}$: $y^2 = x(1-x)$ donc $x^2 + y^2 - x = 0$, $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. C'est le demi-cercle centré en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$. L'intégrale cherchée est donc la demi-aire d'un disque de rayon $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{\pi}{8}$.

Références