

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Calculer en utilisant un bon changement de variables l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Indication 0.0 : Comment laisser les fonctions $\sin x$, $\cos^2 x$ et les bornes invariantes ?

Solution : On effectue le changement de variables $\begin{cases} t = \pi - x \\ dt = -dx \end{cases}$. On trouve que

$$I = - \int_0^\pi \frac{(-\pi + t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

et donc que $2I = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$. On effectue ensuite le changement de variables $\begin{cases} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{cases}$ et on trouve finalement que

$$I = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{\pi}{1 + u^2} du = -\frac{\pi}{2} [\arctan u]_1^{-1} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

Références