Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer à l'aide de changements de variables, les intégrales

$$I_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad I_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad I_3 = \int_a^b (x-a)^n \, \mathrm{d}x$$

Solution : *Pour les deux premières intégrales, on effectue le changement de variable* $\begin{cases} u = x/a \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/a \end{cases}$ *. On obtient alors :*

$$I_1 = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_0^1 \frac{a \, \mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{a \, \mathrm{d}u}{a^2 + a^2u^2} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{\arctan 1}{a} = \boxed{\frac{\pi}{4a}}$$

Pour la troisième, on pose $\begin{cases} u & = x - a \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{cases}$ *:*

$$I_3 = \int_a^b (x-a)^n = \int_0^{b-a} u^n \, \mathrm{d}u = \boxed{\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}}.$$

Références