

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

2. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx$

5. $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

6. $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$

Solution :

1. On pose $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx = u dx \end{cases}$, on obtient : $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{u(1+u)} du = \int_1^e \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du = [\ln u - \ln(1+u)]_1^e = \boxed{\ln 2 - \ln(e+1) + 1}$.

2. On pose $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases}$, on obtient : $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \sin^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4u}{8} du = \boxed{\frac{\pi}{16}}$.

3. On pose $\begin{cases} u = \arcsin x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$, on obtient : $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{u}{1-\sin^2 u}} \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{u} du = \boxed{\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{6}}{54}}$.

4. On pose $\begin{cases} u = \sqrt{\tan(x)} \\ du = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx \end{cases}$, on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx = \int_0^1 2 du = \boxed{2}$.

5. On pose $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases}$, on obtient : $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{2}{1+u} du = \left[2 \ln(1+u) \right]_1^2 =$

$$\boxed{2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

6. On a : $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_0^1 \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dx$ On

pose $\begin{cases} u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{cases}$, on obtient : $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2} du =$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan u \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}.$$

Références