Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int \dfrac{1}{x + x\ln^2 x}\,dx$
2. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$
3. $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$
4. $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$
5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Solution :

1. *On pose* $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$, *on obtient :* $\int \dfrac{1}{x+x\ln^2 x}\,dx = \int \dfrac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C^{te} = \boxed{\arctan \ln x + C^{te}}$.
2. *On pose* $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases}$, *on obtient :* $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{-1}{1+u^2}\,du = -\arctan u + C^{te} = \boxed{-\arctan\cos x + C^{te}}$
3. *On pose* $\begin{cases} u = \operatorname{sh} x \\ du = \operatorname{sh} x dx \end{cases}$, *on obtient :* $\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\operatorname{ch} u\,du = \int \operatorname{ch}^2 u\,du = \int \dfrac{1}{2}\left(1+\operatorname{ch} 2u\right)\,du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sh} 2u + C^{te} = \boxed{\dfrac{1}{2}\operatorname{argsh} x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1+x^2} + C^{te}}$
4. *Un grand classique. Cette fois les différentes méthodes sont instructives :*
   On pose $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx = u dx \end{cases}$, *on obtient :* $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \dfrac{2}{1+u^2}\,du = 2\arctan u + C^{te} = \boxed{2\arctan\left(e^x\right) + C^{te}}$.

Changement en $u = sh\,x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x} &= \int \frac{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x}\\ &= \int \frac{du}{1+u^2}\\ &= \arctan u + C\\ &= \arctan\left(argsh\,x\right) + C.\end{aligned}$$

Changement en $t = th\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x} &= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}}\\ &= 2\arctan t + C\\ &= 2\arctan\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C\end{aligned}$$

Les trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et ne diffèrent donc que d'une constante !

5. *On pose* $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \dfrac{u}{1+u}\,du = \int \dfrac{1+u}{1+u}\,du - \int \dfrac{1}{1+u}\,du =$ $u + \ln|1+u| + C^{te} = \boxed{e^x + ln\left(1+e^x\right) + C^{te}}$
6. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{dx}{2u} \end{cases}$ *, on obtient :*

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} &= \int (u^2-1)\,du\\ &= \frac{u^3}{3} - u + C\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C.\end{aligned}$$

Références