Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

1. *Justifier que pour tout entier $n > 0$, l'intégrale I_n existe.*
2. *Calculer pour $n \geqslant 2$, $I_n - I_{n-2}$, I_0 et I_1.*
3. *En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.*

Solution :

1. *L'intégrale I_0 est clairement bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ est définie et continue sur $]0, \pi/2]$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, par équivalents usuels $\sin nx / \sin x \underset{x \to 0}{\sim} n$. Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} n$. On prolonge alors f par continuité en 0 en posant $f(0) = n$. La fonction ainsi prolongée est continue sur $[0, \pi/2]$ et l'intégrale I_n existe.*
2. *Soit $n \geqslant 2$. On utilise la formule valable pour tout $p, q \in \mathbb{R}$: $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$. Elle livre :*

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi/2} 2\cos\left((n-1)x\right)\,dx = \left[2\frac{\sin\left((n-1)x\right)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\sin\left((n-1)\pi/2\right)}{n-1}$$

   donc $\boxed{I_n = I_{n-2} + \dfrac{2\sin\left((n-1)\pi/2\right)}{n-1}}$. *Par ailleurs $I_0 = 0$ et $I_1 = \pi/2$.*
3. *On utilise les résultats de la question précédente. Si $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ alors*

$$I_n = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\right) = \boxed{2\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}}.$$

   Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\boxed{I_n = \pi/2}$.

Références