Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Calculer pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit $n \geqslant 1$, en intégrant par parties (dériver x^n), on trouve que*

$$I_n = \left[-\tfrac{2}{3} x^n (1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 \tfrac{2n}{3} x^{n-1} (1-x)^{3/2}\,dx = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$$

d'où la relation de récurrence :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} = \dots = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} I_0$$

et puisque $I_0 = \dfrac{2}{3}$, on obtient finalement

$$\boxed{I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}}$$

Références