

# Pas de titre

Alain Soyeur<sup>1</sup>, Emmanuel Vieillard-Baron<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>3</sup>, ,

22 septembre 2021

## Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Trouver une relation entre  $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  et  $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$ .
2. En déduire :  $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$  et  $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$ .

### Solution :

1. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx - 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \left( (2n-1) \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx + \frac{x}{(x^2+1)^n} \right).$$

2. Il s'ensuit que  $I_2 = 1/2(\arctan x + x/(x^2+1)^2) + C^{te}$  car  $I_1 = \arctan x + C^{te}$ . On en tire finalement que  $I_3 = 1/4(3 \arctan x + 3x/(x^2+1)^2 + x/(x^2+1)^3)$ .

## Références