

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une relation entre $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$.
2. En déduire : $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$.

Solution :

1. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx - 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \left((2n-1) \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx + \frac{x}{(x^2+1)^n} \right).$$

2. Il s'ensuit que $I_2 = 1/2(\arctan x + x/(x^2+1)^2) + C^{te}$ car $I_1 = \arctan x + C^{te}$. On en tire finalement que $I_3 = 1/4(3 \arctan x + 3x/(x^2+1)^2 + x/(x^2+1)^3)$.

Références