

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit une fonction f de classe C^2 sur le segment $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx$$

Solution : On effectue deux intégrations par parties successives à partir de la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx &= \underbrace{\left[(x-a)(x-b)f'(x) \right]_a^b}_{=0} - \int_a^b (2x - (a+b)) f'(x) dx \\ &= - \left[(2x - (a+b)) f(x) \right]_a^b + 2 \int_a^b f(x) dx \\ &= - (b-a) (f(a) + f(b)) + 2 \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

et on trouve la formule proposée.

Références