Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution : *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. *Donc* $I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2 \cos(2t)\,dt$. *Pour calculer* $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos(2t)\,dt$, *on effectue deux intégrations par parties successives, les fonctions considérées étant bien de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \pi/2]$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t^2 \cos(2t)\,dt &= \left[\frac{t^2 \sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t \sin(2t)\ dt \\
&= \left[\frac{t \cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\ dt \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\Big[\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}}$.

Références