Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int x \operatorname{ch}^2 x \, dx$
2. $\int x \ln(x+1)\, dx$
3. $\int \operatorname{argth} x \, dx$.
4. $\int \operatorname{ch} x \cos x \, dx$
5. $\int \dfrac{x}{\cos^2 x} \, dx$
6. $\int x \ln^2 x \, dx$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles I considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. *Sur $I = \mathbb{R}$: Comme* $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$, $\int \operatorname{ch}^2 x \, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} + C^{te}$ *et* $\int x \operatorname{ch}^2 x \, dx = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \int \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} \right) dx = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\operatorname{ch} 2x}{8} + C^{te} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{\operatorname{ch} 2x}{8} + C^{te}$.
2. *Sur $I = \left]-1, +\infty\right[$:* $\int x \ln(x+1)\, dx = \dfrac{1}{2}\left(x^2 \ln(x+1) - \int \dfrac{x^2}{x+1}\, dx \right) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 \ln(x+1) - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right) + C^{te}$.
3. *Sur $I = \left]-1, 1\right[$:* $\int \operatorname{argth} x \, dx = x \operatorname{argth} x - \int \dfrac{x}{1-x^2}\, dx = x \operatorname{argth} x + \dfrac{1}{2} \ln\left(1 - x^2\right) + C^{te}$.
4. *Sur $I = \mathbb{R}$: on effectue deux intégrations par parties successives :* $\int \operatorname{ch} x \cos x \, dx = \cos x \operatorname{sh} x + \int \operatorname{sh} x \sin x \, dx = \cos x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{ch} x - \int \cos x \operatorname{ch} x \, dx$. *On en déduit que :* $\int \cos x \operatorname{ch} x \, dx = \dfrac{1}{2}\left(\cos x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{ch} x \right) + C^{te}$
5. *Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:* $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln|\cos x| + C^{te}$

6. *Sur* $I = \mathbb{R}_+^*$ *: on effectue deux intégrations par parties successives :* $\int x \ln^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln^2 x - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right) + C^{te}$

Références