Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int \arcsin x \, dx$
3. $\int x \arctan x \, dx$
4. $\int (x+1) \operatorname{sh} x \, dx$
5. $\int \operatorname{argsh}(3x) \, dx$
6. $\int \ln\left(1+x^2\right) \, dx$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles I considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. *Sur* $I = \mathbb{R}_+^*$: $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C^{te}$
2. *Sur* $I = [-1, 1]$: $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C^{te}$
3. *Sur* $I = R$: $\int x \arctan x \, dx = \dfrac{1}{2}\left(x^2 \arctan x - \int \dfrac{x^2}{1+x^2} \, dx\right)$. *Mais* $\int \dfrac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \left(\dfrac{1+x^2}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan(x) + C^{te}$ *donc* : $\int x \arctan x \, dx = \dfrac{1}{2}\left(x^2 \arctan x - x + \arctan(x)\right) + C^{te} = \dfrac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right) \arctan x - x\right) + C^{te}$.
4. *Sur* $I = \mathbb{R}$: $\int (x+1) \operatorname{sh} x \, dx = (x+1) \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x \, dx = (x+1) \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + \mathbb{C}^{te}$
5. *Sur* $I = \mathbb{R}$: $\int \operatorname{argsh}(3x) \, dx = x \operatorname{argsh}(3x) - \int \dfrac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} \, dx = x \operatorname{argsh}(3x) - \dfrac{\sqrt{1+9x^2}}{3} + C^{te}$
6. *Sur* $I = \mathbb{R}$: $\int \ln\left(1+x^2\right) \, dx = x \ln\left(1+x^2\right) - \int \dfrac{2x^2}{1+x^2} \, dx = x \ln\left(1+x^2\right) - 2x - 2\arctan x + C^{te}$

Références