Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e \ln x \, dx$
2. $\int_0^1 \arctan x \, dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$
4. $\int_0^1 (x+2)\, e^x \, dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x \, dx$
6. $\int_0^{\pi} (x-1) \cos x \, dx$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. $\ln x = \ln x \times 1$, *on trouve* $\int_1^e \ln x \, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^e - \int_1^e \, dx = \boxed{1}$.
2. $\arctan x = 1 \times \arctan x$. *On a alors :* $\int_0^1 \arctan x \, dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ *Mais* $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$. *Donc* $\int_0^1 \arctan x \, dx = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2}$.
3. *On effectue deux intégrations par parties successives et on retrouve l'intégrale de départ : Notant* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$, *on a :* $I = \Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = \Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$. *Donc* $\boxed{I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$.
4. $\int_0^1 (x+2)\, e^x \, dx = \Big[(x+2)\, e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = \boxed{2e-1}$
5. *Comme* $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, *on a :* $\int \sin^3 x \, dx = -\dfrac{3}{4} \cos x + \dfrac{1}{12} \cos 3x$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x \, dx = \Big[-\dfrac{3}{4} x \cos x + \dfrac{1}{12} x \cos 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\dfrac{3}{4} \cos x + \dfrac{1}{12} \cos 3x\right) dx = -\Big[-\dfrac{3}{4} \sin x + \dfrac{1}{36} \sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$

6. $\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx = \Big[(x-1)\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[\cos x\Big]_0^\pi = \boxed{-2}$

Références