

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c les solutions du système :

$$\begin{cases} x - y - mz = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

Solution : La matrice de ce système linéaires est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -m \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(A) =$

$$\begin{cases} 2 & \text{si } m = 5 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

— Si $m = 5$ le système devient : $\begin{cases} x - y - 5z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$ qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y - 5z = a \\ y + 2z = \frac{b-a}{3} \\ y + 2z = \frac{c-a}{2} \end{cases}.$$

Il n'est compatible que si $\frac{b-a}{3} = \frac{c-a}{2}$. Dans ce cas, l'ensemble

de ses solutions est : $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{b-a}{3}, 0\right) + \text{Vect}(3, -2, 1)$.

— Le système est de Cramer si $m \neq 5$. Il admet une et une seule solution donnée par :

$$\left(-\frac{3a+(m+1)b+(1-2m)c}{m-5}, \frac{2a-(m+1)c+(m-1)b}{m-5}, -\frac{a+2b-3c}{m-5}\right)$$

Références