

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c les solutions du système :

$$\begin{cases} mx + my + mz = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

Solution : La matrice de ce système linéaire est $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(A) =$

$$\begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m = 1. \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Si $m = 0$ le système devient : $\begin{cases} 0 = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}$. Il n'est compatible que si $a = 0$. Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est : $(b, c - b, 0) + \text{Vect}(-1, 1, 1)$.

— Si $m = 1$ le système est : $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$. Il n'est compatible que si $a = b = c$. Dans ce cas, l'ensemble solution est $(a, 0, 0) + \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, -1))$

— Le système est de Cramer si $m \neq 0$ et $m \neq 1$. Il admet une et une seule solution donnée par :

$$\left(\frac{(m+1)a - cm - mb}{m(m-1)}, -\frac{-mb+a}{m(m-1)}, -\frac{a-cm}{m(m-1)} \right)$$

Références