Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit f l'application linéaire qui fait correspondre au vecteur (x, y, z) le vecteur (a, b, c, d) dont les coordonnées sont définies par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrl} -x-y & +mz= & a \\ -mx+y & +mz= & b \\ x-y & -mz= & c \\ mx+y & +z= & d \end{array}\right.$$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, le rang de f. En déduire le nombre de solutions du système précédent puis le résoudre en fonction du second membre.

Solution : *Après permutation des deuxièmes et troisièmes lignes, on effectue des oel sur le tableau :*

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & -1 & m & a \\ 1 & -1 & -m & c \\ -m & 1 & m & b \\ m & 1 & 1 & d \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-mL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+mL_1 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & m & a \\ 0 & -2 & 0 & a+c \\ 0 & 1+m & m-m^2 & b-ma \\ 0 & 1-m & 1+m^2 & d+ma \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+\frac{1+m}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+\frac{1-m}{2}L_2 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & m & a \\ 0 & -2 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & m-m^2 & b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c) \\ 0 & 0 & 1+m^2 & d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c) \end{array}$$

En prenant les lignes L_1, L_2 et L_4 on voit que le rang du système égale 3. Donc s'il existe une solution, alors elle est unique.

On résout donc le système (triangulaire) en x, y et z grâce aux lignes L_1, L_2 et L_4. La ligne L_3 sert de vérification : Si

$$\left(m-m^2\right) z=\frac{m-m^2}{1+m^2}\left(d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c)\right)=b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c),$$

alors le système est compatible et admet une solution unique. Sinon il n'admet pas de solution.

Références