Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $f \in L(E)$ de rang 1.

1. *Si l'on suppose que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$, montrer qu'il existe une base ε de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que*
$$\operatorname{Mat}_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
2. *En déduire que pour tout endomorphisme f de rang 1, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \alpha f$.*
3. *Soit une base e quelconque de E, et un endomorphisme $f \in L(E)$ quelconque. On note $B = \operatorname{Mat}_e(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base e. Montrer l'équivalence*
$$\operatorname{rg}(f) = 1 \leftrightarrow \exists (X, Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2 \text{ non nuls tels que } B = XY^{\mathrm{T}}$$
(On se contentera de la démonstration dans le cas où $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$). voir exercice **??** *p.***??**.

Solution :

1. *D'après la formule du rang,*
$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$$
donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E de dimension $(n-1)$. Comme $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1$, il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$. Puisque l'on a supposé que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, et que $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$, on sait que
$$E = \operatorname{Vect}(a) \oplus \operatorname{Ker} f$$
le système (a) est une base de $\operatorname{Im} f$, et si l'on suppose $n \geqslant 2$, puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, il existe une base de $\operatorname{Ker} f$ de la forme $(\varepsilon_2 \dots, \varepsilon_n)$. Le théorème de la base adaptée à une

somme directe nous dit alors que le système $\varepsilon = (a, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E. Comme $f(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$. La matrice de f dans la base ε est donc bien de la forme souhaitée.

2. *Dans le cas où $a \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $f^2 = 0$. Le résultat est montré avec $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$.*

   On peut donc supposer que $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ et alors $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. D'après a), on a construit une base ε dans laquelle la matrice de f était simple : $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \lambda E_{11}$. On calcule alors $A^2 = \lambda^2 E_{11} E_{11} = \lambda^2 E_{11} = \lambda A$ et on en déduit que $f^2 = \lambda f$.

3. *Supposons que $\operatorname{rg} f = 1$. Lorsque $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, on a construit une base ε dans laquelle la matrice de f s'écrivait $A = \lambda E_{11}$. Posons X' la matrice colonne avec un λ sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes, et Y' la matrice colonne avec un 1 sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes. Un calcul direct montre que*

   $$A = X' {Y'}^{\mathrm{T}}$$

   Mais puisque les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes ε et e, elles sont semblables. En notant P la matrice de passage de la base ε vers la base e, on a

   $$A = PBP^{-1} = (PX'){Y'}^{\mathrm{T}} P^{-1} = (PX')\left({P^{-1}}^{\mathrm{T}} Y'\right)^{\mathrm{T}}$$

   et il suffit de poser $X = PX' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $Y = P^{-1}{Y'}^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ pour avoir $B = XY^{\mathrm{T}}$.

   Si l'on suppose maintenant que $B = XY^{\mathrm{T}}$, en notant $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, la matrice B s'écrit :

   $$B = ((x_i y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

   On s'aperçoit que toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles à la matrice colonne X. En utilisant l'algorithme du rang, on trouve que cette matrice est de rang 1 (la colonne X est non-nulle).

Références